Министерство науки и высшего образования РФ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»

В.Е. Сидоров, П.С. Попель, А.А. Сабирзянов,
Л.Д. Сон, А.П. Усольцев, Е.П. Антипова

Механика

Учебное пособие
для самостоятельной работы студентов

Екатеринбург 2019

УДК 378.016:530(075.8)
ББК В2р
М55

Рекомендовано Ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Уральский государственный педагогический университет» в качестве *учебного* издания (Решение № 70 от 11.10.2019)

Рецензенты:

А.А. Повзнер, д-р физ.-матем. наук, проф., заведующий кафедрой физики Уральского федерального университета им. первого Президента России Б.Н. Ельцина

А.Д. Ивлиев, д-р физ.-матем. наук, проф., проф. кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Российского государственного профессионально-педагогического университета

М55 Механика [Электронный ресурс] : учебное пособие для самостоятельной работы студентов / В. Е. Сидоров [и др.] ; Урал. гос. пед. ун-т. – Электрон. дан. – Екатеринбург : [б. и.], 2019. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

ISBN 978-5-7186-1208-0

Учебное пособие предназначено для студентов дневных и заочных факультетов педагогических университетов и институтов, изучающих курс физики в соответствии с рабочей программой дисциплины «Общая и экспериментальная физика», по специальности 44.03.05 Педагогическое образование.

Пособие написано с учетом проводимой в университете реструктуризации учебного процесса, предусматривающей уменьшение числа аудиторных занятий и перенос существенной доли программного материала на самостоятельное изучение студентами.

В пособии в сжатом виде изложены основные положения и темы первого раздела курса (Механики), с которыми студенты должны ознакомиться самостоятельно, а в дальнейшем рассмотреть и проанализировать наиболее сложные вопросы на аудиторных занятиях. Приведены примеры решения наиболее типичных для каждого подраздела задач, а также задачи для самостоятельного решения и варианты индивидуальных контрольных работ.

УДК 378.016:530(075.8)
ББК В2р

ISBN 978-5-7186-1208-0

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Особенность современного подхода к обучению в высшей школе состоит в усилении самостоятельной работы студентов в течение семестра при существенном сокращении количества аудиторных занятий. Цель данного методического пособия – оказать помощь студенту в решении задач, предлагаемых преподавателем для самостоятельного решения. Особенно полезным оно может оказаться при выполнении домашних контрольных работы. При создании пособия авторы руководствовались действующей программой курса физики. Однако данное пособие не заменяет работу над этим курсом по учебникам. Пособие содержит программу курса, методические рекомендации по оформлению контрольных работ, основные теоретические положения и формулы, примеры решения задач, сборник задач для самостоятельного решения и варианты контрольных работ. По мысли авторов, оно должно облегчить переход от изучения теоретического материала по учебнику к самостоятельному решению контрольных задач.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА ФИЗИКИ, Ч. 1. МЕХАНИКА

1. Механическое движение. Системы отсчета. Материальная точка, абсолютно твердое тело. Виды механических движений: поступательное, вращательное.

2. Поступательное движение. Характеристики движения: радиус-вектор, перемещение, траектория, путь, скорость, ускорение, нормальное, тангенциальное, полное ускорение.

3. Вращательное движение и его характеристики: угол поворота, угловая скорость, угловое ускорение. Соотношение между линейными и угловыми характеристиками движения.

4. Динамика материальной точки. Сила, масса тела. Виды сил в механике. Законы Ньютона.

5. Импульс. Закон сохранения импульса. Работа. Работа постоянной и переменной силы. Кинетическая энергия и теорема о связи энергии и работы. Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальное поле. Виды механической энергии. Закон сохранения энергии. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удар.

6. Момент силы и момент импульса механической системы. Закон сохранения момента импульса. Момент силы относительно оси. Момент импульса тела относительно неподвижной оси вращения. Момент инерции тела относительно оси. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси. Кинетическая энергия вращающегося тела.

7. Элементы специальной теории относительности (СТО). Постулаты специальной тории относительности. Преобразования Лоренца и следствия из них. Релятивистская динамика: импульс, масса, работа, энергия. Значение СТО. Границы применимости классической механики.

8. Свободные гармонические колебания. Характеристики колебательного движения: амплитуда, фаза, частота, период.

9. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Решение уравнения. Скорость, ускорение при гармонических колебаниях. Кинетическая, потенциальная и полная энергии при гармонических колебаниях.

10. Математический и физический маятники.

11. Затухающие колебания. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Решение уравнения. Зависимость амплитуды от времени. Частота колебаний, логарифмический декремент, добротность.

12. Вынужденные механические колебания. Дифференциальное уравнение. Решение уравнения. Зависимость амплитуды от частоты переменной силы. Резонанс.

13. Волновое движение. Поперечные и продольные волны. Характеристики волны: длина волны, скорость, волновая поверхность, фронт волны. Уравнение волны. Волновое уравнение. Энергия бегущих волн. Вектор Умова. Принцип суперпозиции волн. Групповая скорость.

14. Эффект Допплера.

ЛИТЕРАТУРА

Трофимова Т. И. Курс физики : учеб. пособие для вузов. – 11-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия», 2006. – 560 с.

Савельев И. В. Курс обшей физики. – 15-е изд., стер. – М. : Изд-во «Лань», 2019. – Т. 1. – 436 с.

Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. – 4-е изд., стер. – М. : Изд-во «Лань», 2009. – 336 с.

Стрелков С. П. Механика. – 6-е изд., стер. – М. : Изд-во «Лань», 2019. – 560 с.

Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. – СПб. : Книжный Мир, 2006. – 328 с.

Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике : учеб. пособие для вузов. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Физматлит, 2007. – 640 с.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ И ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. За время изучения курса общей физики студент должен представить в учебное заведение (сдать ведущему преподавателю) контрольные работы по всем разделам курса «Общая и экспериментальная физика».

2. Номера задач, которые студент должен включить в свою контрольную работу, определяются по таблицам вариантов.

3. Контрольные работы нужно выполнять чернилами в школьной тетради, на обложке указывается фамилия и инициалы студента, номер группы и номер варианта.

4. Условия задач в контрольной работе надо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставлять поля.

5. В конце контрольной работы указать, каким учебником или учебным пособием студент пользовался при изучении физики (название учебника, автор, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент в случае необходимости мог указать, что следует студенту изучить для завершения контрольной работы.

6. Если контрольная работа при рецензировании не зачтена, студент обязан представить ее на повторную рецензию, включив в нее те задачи, решения которых содержали ошибки.

7. Решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями; в тех случаях, когда это возможно, дать чертеж, выполненный с помощью чертежных принадлежностей.

8. Решать задачу надо в общем виде, т. е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.

9. После получения расчетной формулы для проверки ее правильности следует подставить в правую часть формулы вместо символов величин обозначения единиц этих величин, произвести с ними необходимые действия и убе-

диться в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.

10. Числовые значения величин при подстановке их в расчетную формулу следует выражать только в единицах СИ. В виде исключения допускается выражать в любых, но одинаковых единицах числовые значения однородных величин, стоящих в числителе и знаменателе дроби и имеющих одинаковые степени.

11. При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.

12. Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений (см. в «Задачнике по физике» А. Г. Чертова, А. А. Воробьева Приложение о приближенных вычислениях). Как правило, окончательный ответ следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

1. Кинематика материальной точки

Кинематика – это раздел механики, в котором изучаются способы описания движений независимо от причин, обусловивших эти движения.

Для описания механического движения любого тела необходимо задать *систему отсчета*, которая состоит из тела отсчета, системы координат и часов.

В классической механике существуют две основные модели – материальной точки и абсолютно твердого тела.

Материальной точкой (м.т.) называется тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. М.т. может двигаться только поступательно, вращаться вокруг своей оси она не может, т.к. не имеет собственных размеров.

Местоположение м.т. в пространстве может быть задано либо посредством *координат* – тройкой чисел (x, y, z), либо *радиус-вектором* $\vec{r}$ – вектором, проведенным из начала координат к данной м.т. Радиус-вектор имеет проекции $\vec{r} = (x, y, z)$,совпадающие с координатами точки (рис. 1).

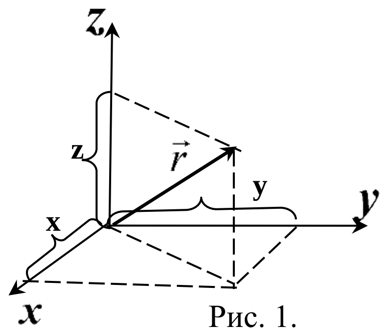


Рис. 1.

Если м.т. изменяет свое положение в пространстве, то для описания движения вводят *вектор перемещения* $\Delta\vec{r}$. Этот вектор соединяет начальное и конечное положения м.т. (рис. 2).

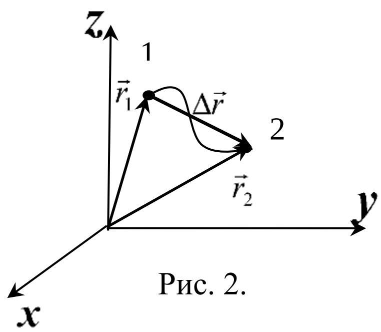


Рис. 2.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Траекторией называется воображаемая линия, вдоль которой движется м.т. *Путь S* – скалярная физическая величина (СФВ), численно равная длине траектории. Путь S в отличие от разности координат $\Delta x = x_2 - x_1$ не может убывать и принимать отрицательные значения, т. е. всегда $S \geq 0$. При прямолинейном движении в одном направлении путь равен модулю перемещения $S = |\Delta\vec{r}|$. В остальных случаях $S \geq |\Delta\vec{r}|$.

Скорость $\vec{V}$ – векторная физическая величина (ВФВ), характеризующая быстроту изменения положения м.т. в пространстве. Средняя скорость $\langle\vec{V}\rangle$ определяется как

$$\langle\vec{V}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

где $\Delta\vec{r}$ – перемещение м.т., а Δt – время, за которое оно произошло. Вектор средней скорости направлен так же, как и вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ (рис. 3а). Проекция средней скорости на ось x $\langle V_x\rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Средняя путевая скорость $\langle V\rangle = \frac{S}{\Delta t}$, где S - путь, пройденный точкой за интервал времени Δt.

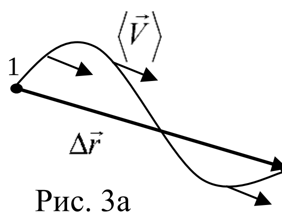


Рис. 3а

Уменьшая интервал времени Δt, в пределе получим *мгновенную скорость* точки $\vec{V}$, т. е. скорость в данный момент времени

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'.$$

Ее компоненты равны

$$V_x = x' = \frac{dx}{dt},\ V_y = y' = \frac{dy}{dt},\ V_z = z' = \frac{dz}{dt},$$

а модуль определяется выражением

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\,.$$

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной в каждой точке траектории в сторону движения тела (рис. 3б).

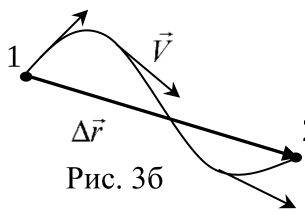


Рис. 3б

Ускорение $\vec{a}$ – ВФВ, характеризующая быстроту изменения скорости. По аналогии со скоростью вводят среднее $<\vec{a}>$ и мгновенное $\vec{a}$ ускорения:

$$<\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t},\ \vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}'.$$

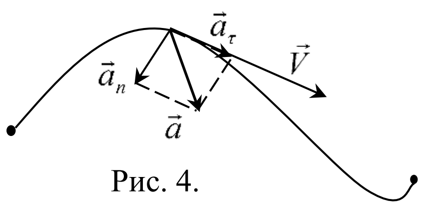


Рис. 4.

Вектор среднего ускорения $<\vec{a}>$ сонаправлен с вектором изменения скорости $\Delta\vec{V}$, а направление мгновенного ускорения $\vec{a}$ зависит от условий конкретной задачи. Часто мгновенное ускорение раскладывают на две составляющие – тангенциальное ($\vec{a}_\tau$) и нормальное ($\vec{a}_n$) ускорения (рис. 4).

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует изменение скорости по модулю и направлено по касательной к траектории (так же, как и мгновенная скорость). Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ характеризует изменение скорости по направлению и направлено к центру кривизны траектории. Численно

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \qquad a_n = \frac{V^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории.

В частном случае прямолинейного движения м.т. вдоль оси x формулы для пути принимают вид:

для равномерного движения $S = V_0 t$;

для равноускоренного движения $S = V_0 t + \dfrac{a_0 t^2}{2}$;

для равнозамедленного движения $S = V_0 t - \dfrac{a_0 t^2}{2}$;

При описании движения материальной точки по окружности на смену основным характеристикам движения ($\vec{r}, \vec{V}, \vec{a}$) приходят новые – *угол поворота* $\vec{\varphi}$, *угловая скорость* $\vec{\omega}$ и *угловое ускорение* $\vec{\varepsilon}$. Этим величинам искусственно приписывают свойства векторов – все они выходят из центра окружности и направлены вдоль оси вращения. Модуль вектора угла поворота равен углу, на который повернулся радиус-вектор при движении м.т. Модуль мгновенной угловой скорости $\omega = \left|\dfrac{d\varphi}{dt}\right|$, а мгновенного углового ускорения $\varepsilon = \left|\dfrac{d\omega}{dt}\right|$. Направление вектора угла поворота определяется с помощью буравчика (рис. 5). Вектор

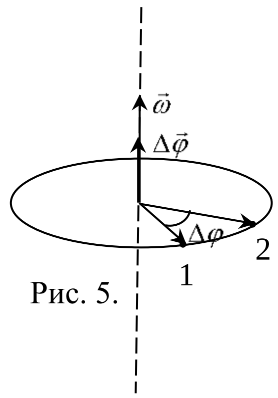


Рис. 5.

$\vec{\omega}$ всегда совпадает по направлению с $\Delta\vec{\varphi}$, а вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с первыми двумя, если угловая скорость с течением времени увеличивается, и направлен в противоположную сторону, если угловая скорость уменьшается.

Связь между модулями линейных и угловых величин, характеризующих движение точки по окружности, дается уравнениями:

$$V = \omega \cdot R\,,\; a_\tau = \varepsilon \cdot R\,,\; a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

где V – модуль линейной скорости; a_τ и a_n – модули тангенциального и нормального ускорений; ω – модуль угловой скорости; ε – модуль углового ускорения; R – радиус окружности.

2. Динамика материальной точки

Классическая динамика м.т. построена на трех законах Ньютона, как на постулатах. При этом первый и третий закон играют вспомогательную роль, а второй является основным уравнением динамики м.т.:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

где $\vec{a}$ – ускорение м.т., m – ее инертная масса, $\vec{F}$ – равнодействующая (векторная сумма) всех сил, приложенных к телу. Если сил немного, то для нахождения равнодействующей пользуются правилом параллелограмма, если много – правилом многоугольника. Сила есть ВФВ являющаяся мерой интенсивности взаимодействия между телами. В природе известно много различных взаимодействий, однако, любое из них можно отнести к одному из четырех фундаментальных видов:

ядерное (сильное) – возникает между частицами, входящими в состав атомного ядра. Ядерные силы проявляют себя на очень коротких расстояниях, не превышающих 10^{-15} м, но являются самыми мощными силами в природе. Благодаря наличию ядерных сил оказываются стабильными сами атомные ядра;

электромагнитное – возникает только между электрически заряженными телами, но проявляет себя на любых расстояниях. При прочих равных условиях это взаимодействие слабее ядерного примерно в 100 раз. Отвечает за стабильность атомов и молекул;

слабое – присутствует внутри самих элементарных частиц, т.е. на расстояниях, меньших 10^{-17}м, и обеспечивает многообразии ядерных реакций и частиц в микромире. Слабее ядерного в 10^{19} раз;

гравитационное – самое слабое взаимодействие в природе (слабее ядерного в 10^{35} раз), но возникает между любыми телами в природе и на любых расстояниях. Отвечает за стабильность мегасистем (Солнечной системы, галактики и т. д.).

В классической механике имеют дело с гравитационными и электромагнитными силами:

а) сила гравитационного взаимодействия $F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, где G – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел, r – расстояние между телами (тела рассматриваются как материальные точки). В условиях Земли эту силу часто называют силой тяжести и записывают в виде $F = mg$, где g – ускорение свободного падения, $g = 9{,}8\,{}^{м}\!/_{с^2}$.

б) сила упругости $F = -k \cdot x$, где k – коэффициент жесткости, x – абсолютная деформация;

в) сила сухого трения $F = \mu \cdot N$, где μ – коэффициент трения; N – сила нормального давления (сила реакции опоры).

Импульсом $\vec{p}$ м. т. массой m, движущейся со скоростью $\vec{V}$, называется ВФВ, определяемая уравнением

$$\vec{p} = m \cdot \vec{V}\ .$$

Суммарным (полным) импульсом системы тел называется векторная сумма импульсов всех тел, входящих в состав данной системы:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$$

Система тел называется изолированной (замкнутой), если на нее не действуют никакие внешние силы.

Для замкнутой системы тел выполняется один из фундаментальных законов механики – закон сохранения импульса:

Суммарный импульс замкнутой системы есть величина постоянная, т.е. с течением времени не изменяется

$$\sum_{i}^{N} \vec{p}_i = const,$$

Для случая двух тел ($N = 2$) закон можно записать в виде

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2',$$

где $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ – скорости тел в момент времени, принятый за начальный, $\vec{V}_1'$ и $\vec{V}_2'$ – скорости тех же тел в момент времени, принятый за конечный.

Элементарной работой силы называется СФВ, определяемая выражением

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha,$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на тело, $d\vec{r}$ – элементарное перемещение, α – угол между вектором силы и вектором перемещения. Работа может быть как положительной, так и отрицательной величиной, все зависит от взаимной ориентации векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$.

Работа силы при конечном перемещении тела находится как

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot \cos\alpha \cdot dr$$

Вычисление написанного интеграла часто весьма трудоемкий процесс, поэтому работу силы можно найти и через *кинетическую энергию тела* T ($T = \frac{m \cdot V^2}{2} = \frac{p^2}{2 \cdot m}$):

$$A = T_2 - T_1 = \Delta T.$$

Если на тело действует несколько сил, то в левой части уравнения стоит суммарная работа всех сил.

Кинетическая энергия характеризует движение данного тела относительно других тел системы. Это всегда неотрицательная величина.

В общем случае работа силы есть функция процесса, т. е. ее величина зависит от того, каким путем тело переходит из начального положения в конечное.

Однако в природе существует ряд сил, работа которых не зависит от формы траектории движения тела, а определяется лишь его начальным и конечным положениями. Такие силы называются *потенциальными* или *консервативными.* Для них можно ввести понятие *потенциальной энергии* U. Эта энергия характеризует взаимодействие между телами в системе и зависит от их взаимного расположения. В отличие от кинетической, потенциальная энергия может быть как положительной, так и отрицательной, т. е. нулевой уровень потенциальной энергии можно задавать произвольно, исходя из условий данной задачи. Работу потенциальных сил записывают так

$$A_{12} = U_1 - U_2,$$

где U_1 и U_2 – потенциальные энергии в начальной и конечной точках траектории тела соответственно. Формула для потенциальной энергии зависит от того, какие силы действуют в системе. Например, потенциальная энергия:

а) упругодеформированной пружины $U = \frac{k \cdot x^2}{2}$, где k – жесткость пружины, x – абсолютная деформация;

б) гравитационного взаимодействия $U = -G\frac{m_1 \cdot m_2}{r}$, где G – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел, r – расстояние между ними (тела рассматриваются как материальные точки);

в) тела, находящегося в однородном поле силы тяжести, $U = mgh$, где g – ускорение свободного падения, h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой (формула справедлива при условии $h << R$, где R – радиус Земли).

Механической энергией W тела называется сумма его кинетической и потенциальной энергий

$$W = T + U$$

Полной механической энергией системы тел называется сумма механических энергий тел, входящих в состав данной системы

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$

Для замкнутой системы тел справедлив второй фундаментальный закон механики – закон сохранения энергии:

Полная механическая энергия замкнутой системы тел есть величина постоянная, если в системе не действуют непотенциальные силы, типа сил трения.

$$W = const$$

Для случая двух тел этот закон принимает вид

$$W_1 + W_2 = W_1' + W_2',$$

где W и W' – энергии тел до и после взаимодействия.

Моментом импульса м.т. называется ВФВ

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] \text{ или } L = r \cdot p \cdot \sin\alpha,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из начала координат к м.т., $\vec{p}$ – импульс м.т., α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$. Эта характеристика используется для описания вращения м.т. вокруг оси.

Суммарным (полным) моментом импульса системы материальных точек называется векторная сумма моментов импульса всех м.т., входящих в состав данной системы:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots + \vec{L}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i .$$

Для системы м.т. справедлив третий фундаментальный закон механики – закон сохранения момента импульса:

Суммарный момент импульса системы тел есть величина постоянная, если:

– система изолирована;

– система находится в поле центральных сил

$$\vec{L} = const .$$

Сила называется центральной, если ее направление определяется направлением радиуса-вектора, а модуль зависит от модуля радиуса-вектора. Примером центральных сил являются сила тяжести, сила тяготения, сила упругости, сила Кулона.

3. Вращательное движение твердого тела

Абсолютно твердым телом (АТТ) называется тело, которое не меняет своей формы ни при каких внешних воздействиях. В отличие от материальной точки, АТТ может не только двигаться поступательно в пространстве, но и вращаться вокруг произвольной оси, проходящей через одну из точек тела.

Основное уравнение динамики вращательного движения АТТ относительно неподвижной оси z

$$J_z \varepsilon = M_z ,$$

где J_z – момент инерции тела относительно рассматриваемой оси вращения, ε – угловое ускорение, M_z – проекция на ось z результирующего момента внешних сил, действующих на тело.

Момент инерции тела характеризует массу тела и ее распределение в пространстве, т. е. зависит от формы тела.

В том случае, если ось вращения проходит через центр масс (центр инерции) тела, то для тел правильной формы и массы m моменты инерции известны. Например, для:

а) стержня длиной l относительно оси, перпендикулярной стержню,

$$J_z = 1/12\, ml^2 ;$$

б) обруча (тонкостенного цилиндра) относительно оси, перпендикулярной плоскости обруча (совпадающей с осью цилиндра),

$$J_z = mR^2 ,$$

где R – радиус обруча (цилиндра);

в) диска (сплошного цилиндра), радиусом R, относительно оси, перпендикулярной плоскости диска,

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2 ,$$

г) шара, радиусом R

$$J_z = {}^2\!/_5\, mR^2 .$$

Если же ось вращения не проходит через центр масс тела, то для вычисления момента инерции пользуются теоремой Штейнера:

$$J_z = J_z^0 + mb^2 ,$$

где J_z^0 – момент инерции относительно оси, параллельной заданной и проходящей через центр масс тела, m – масса тела, b – расстояние между осями.

Проекция момента силы на ось z находится как

$$M_z = F \cdot h ,$$

где F – модуль силы, h – плечо силы, т. е. кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы (рис. 6). M_z берется со знаком «+», если сила стремится повернуть тело по часовой стрелке, и со знаком «-», если против.

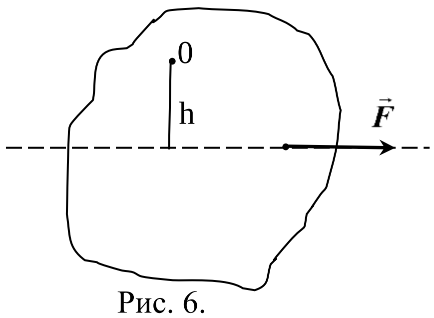


Рис. 6.

Проекция на ось z момента импульса тела, вращающегося относительно неподвижной оси z

$$L_z = J_z \omega ,$$

где ω – угловая скорость тела.

Закон сохранения момента импульса системы n тел, вращающихся вокруг неподвижной оси z, имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} (J_z \omega)_i = const ,$$

где J_z – момент инерции каждого тела системы относительно оси z; ω – угловая скорость вращения тела системы вокруг оси z.

Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z,

$$T_{вращ} = {}^1\!/_2\, J_z \omega^2 \text{ или } T_{вращ} = L_z^2 / (2J_z).$$

Если тело совершает произвольное движение, то его кинетическая энергия T складывается из энергии поступательного движения $T_{пост}$ и энергии вращательного движения $T_{вращ}$

$$T = T_{пост} + T_{вращ} = \frac{m \cdot V^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2}.$$

4. Элементы релятивистской механики

В релятивистской механике – специальной теории относительности (СТО) – рассматривается движение тел со скоростями, близкими к скорости света. СТО базируется на двух постулатах:

1. Постулат о постоянстве скорости света – скорость света постоянна во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источника и приемника света.

2. Принцип относительности Эйнштейна – все физические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах, т. е. вид физических законов не изменяется при переходе от одной ИСО к другой.

Математической основой СТО служат преобразования Лоренца – это формулы, связывающие между собой координаты и время, измеренные в различных ИСО.

При движении тел с большими скоростями начинают проявляться эффекты, не наблюдаемые, как правило, в обычной жизни:

Лоренцовское сокращение длины. Продольные размеры движущегося тела относительно неподвижного наблюдателя уменьшаются

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

где l_0 – собственная длина – длина неподвижного тела, V – скорость тела, c – скорость света в вакууме.

Поперечные размеры тела остаются при этом неизменными.

Замедление времени. В движущейся системе отсчета время течет медленнее, т. е. темп хода часов уменьшается

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad ,$$

где Δt – промежуток времени, измеренный по часам неподвижной системы отсчета, Δt_0 – промежуток времени, измеренный часами движущейся системы.

Относительность одновременности событий. Независимые события, одновременные в одной системе отсчета, перестают быть одновременными в другой системе отсчета. Если же события связаны причинно-следственной связью, то для них выполняется *принцип причинности* – ни в одной системе отсчета причина и следствие не могут поменяться местами. Из принципа причинности следует, что скорость передачи любого взаимодействия, в том числе и скорость механического движения тела, не может быть больше скорости света в вакууме.

Увеличение массы движущегося тела. С увеличением скорости движения тела его инертная масса *m* возрастает

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad ,$$

где m_0 – масса покоя.

В СТО необходимо учитывать *энергию покоя* E_0 любого тела или микрочастицы

$$E_0 = m_0 c^2 \quad .$$

Полная энергия релятивистской частицы находится как сумма ее энергии покоя и кинетической энергии и может быть записана в виде

$$E = E_0 + T = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad .$$

Кинетическая энергия частицы в СТО определяется как разность ее полной энергии и энергии покоя

$$T = E - E_0 = (m - m_0)c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad .$$

Импульс релятивистской частицы

$$p = mV = \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{c}\sqrt{T(T + 2E_0)} .$$

Связь между импульсом и полной энергией релятивистской частицы может быть записана в виде

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0 c^2} .$$

5. Механические гармонические колебания

Колебания – процессы, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости.

Свободными (собственными) называются колебания, происходящие в системе, выведенной из положения равновесия и предоставленной самой себе. Система, в которой возникли колебания, называется *осциллятором*.

Гармоническими являются колебания, описываемые законом синуса или косинуса. Это всегда малые колебания.

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний имеет вид

$$\xi'' + \omega_0^2 \cdot \xi = 0,$$

где $\xi = x - x_0$ – смещение тела из положения равновесия, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная циклическая (круговая) частота колебаний, k – коэффициент жесткости системы, m – масса тела. Это дифференциальное уравнение второго порядка, линейное, однородное.

Решение дифференциального уравнения может быть записано в виде

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A – максимальное смещение или амплитуда колебаний, $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний, φ_0 – начальная фаза, t – время.

Период колебаний T – время одного полного колебаний. Частота колебаний ν – число колебаний в единицу времени.

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

В гармонических колебаниях амплитуда A и начальная фаза φ_0 зависят только от начальных условий, тогда как частота и период колебаний определяются упругими свойствами системы.

Скорость V и ускорение a колеблющегося тела являются первой и второй производными от смещения ξ

$$V = \xi' = -A \cdot \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$a = V' = \xi'' = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Графики зависимостей $\xi(t)$, $V(t)$ и $a(t)$ для случая $\varphi_0 = 0$ приведены на рис. 7. Здесь время отложено в долях периода.

Совершая колебания, тело обладает кинетической $E_к$, потенциальной $E_{пот}$ и полной механической E энергиями

$$E_к = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$E_{пот} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \xi^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot A^2.$$

Графики зависимостей энергий от времени приведены на рис. 8. Также для случая $\varphi_0 = 0$.

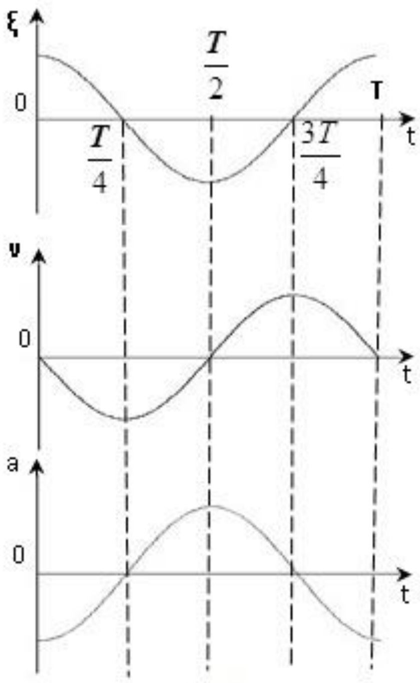


Рис.7

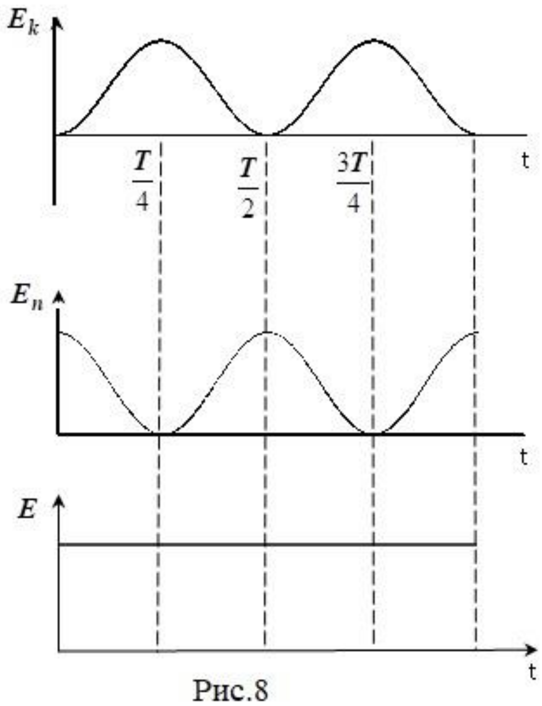


Рис.8

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой, нерастяжимой нити. Особенностью этого осциллятора является независимость периода гармонических колебаний от массы подвешенного тела

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{l/g}\,,$$

где l – длина нити, g – ускорение силы тяжести.

Физическим маятником называется тело, совершающее колебания вокруг оси, проходящей через одну из точек этого тела. Период гармонических колебаний физического маятника находится как

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_{zz}}{mgl}}\,,$$

где I_{zz} – момент инерции маятника относительно оси вращения, m – масса маятника, l – расстояние от центра масс до оси вращения.

6. Затухающие колебания

В любой реальной колебательной системе действуют силы трения или силы сопротивления среды. Это приводит к тому, что с течением времени механическая энергия колебаний уменьшается, т. е. колебания затухают. При не очень больших скоростях движения тела сила сопротивления среды оказывается, как правило, прямо пропорциональной скорости движения тела $F_{сопр} = -r \cdot V$, где r – коэффициент сопротивления среды. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$\xi'' + 2\beta \cdot \xi' + \omega_0^2 \cdot \xi = 0,$$

здесь $2\beta = {}^{r}\!/_{m}$, $\omega_0^2 = {}^{k}\!/_{m}$.

Решение данного дифференциального уравнения может быть представлено в виде

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Выделим две особенности затухающих колебаний. Во-первых, амплитуда колебаний становится функцией времени, т. е. убывает с ростом t: $A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$. Во-вторых, затухающие колебания происходят с меньшей частотой, по сравнению с собственными колебаниями: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$.

Характеристики затухающих колебаний:

1) коэффициент затухания β – характеризует уменьшение амплитуды колебаний за единицу времени;

2) логарифмический декремент затухания λ – характеризует уменьшение амплитуды колебаний за период. Он равен логарифму отношения двух соседних амплитуд $\lambda = \ln \dfrac{A(t)}{A(t+T)} = \beta \cdot T$;

3) время релаксации τ – время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз: $\tau = \dfrac{1}{\beta}$;

4) добротность Q – характеризует относительную убыль энергии колебаний за один период: $Q = \dfrac{\pi}{\lambda}$.

7. Вынужденные колебания

Если на осциллятор действует внешняя периодическая сила $\vec{F} = \vec{F}_0 \cdot \cos(\Omega t)$, то возникают вынужденные колебания. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\xi'' + 2\beta \cdot \xi' + \omega_0^2 \cdot \xi = f_0 \cdot \cos(\Omega t),$$

где $2\beta = r/m$, $\omega_0^2 = k/m$, $f_0 = F_0/m$.

Установившееся решение этого уравнения можно записать в виде

$$\xi(t) = A \cdot \cos(\Omega t - \varphi),$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний, φ – сдвиг фаз между внешней силой и колебаниями в системе. Отметим следующие особенности вынужденных колебаний:

– эти колебания всегда происходят с частотой внешней силы;

– и амплитуда, и фаза вынужденных колебаний зависят от частоты внешнего воздействия:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

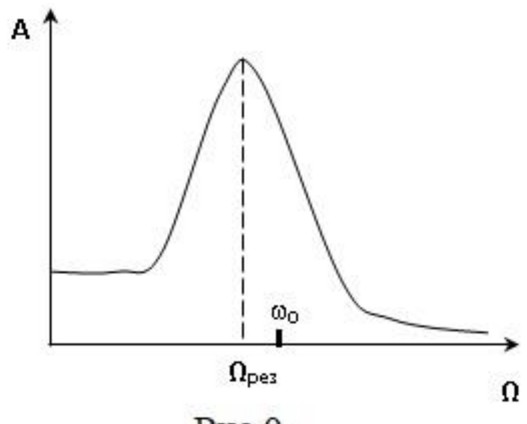


Рис.9

Например, на рис. 9 приведен график $A = A(\Omega)$. Видно, что при приближении частоты внешней силы к собственной частоте колебаний в системе (а точнее, при $\Omega = \Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$) наблюдается явление резкого возрастания амплитуды колебаний, т. е. резонанс. При резонансе амплитуда колебаний увеличивается в Q раз по сравнению с амплитудой колебаний при низких частотах.

8. Сложение колебаний

Если в системе одновременно возбуждены два колебания одного направления и одинаковых частот $\xi_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $\xi_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_2)$, то в результате их сложения возникает колебание

$$\xi = A \cdot \cos(\omega t + \varphi), \qquad (9)$$

причем амплитуда результирующего колебания

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

начальная фаза результирующего колебания

$$\varphi = arctg\left(\frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} \right).$$

Если складываются колебания близких, но не равных частот, т.е. $\xi_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t)$ и $\xi_2 = A_2 \cdot \cos(\omega + \Delta\omega)t$, при этом $\Delta\omega << \omega$, то возникают биения – колебания с пульсирующей амплитудой. При этом амплитуда биений изменяется в интервале $|A_1 - A_2| \le A \le A_1 + A_2$ с частотой $\Delta\omega$ (см. рис. 10).

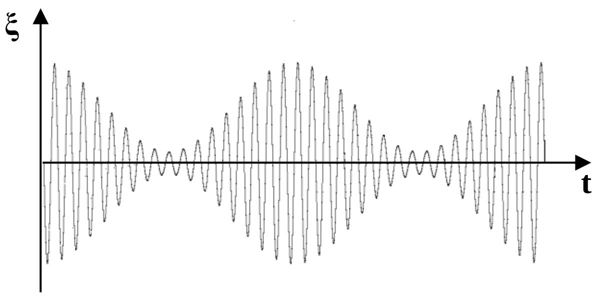


Рис. 10

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний возникает сложное движение. Однако, если частоты складываемых колебаний равны, то траектория точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = A_1 \cos(\omega t)$, $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$, имеет вид:

а) $y = \frac{A_2}{A_1} x$, если разность фаз $\varphi = 0$;

б) $y = -\frac{A_2}{A_1} x$, если разность фаз $\varphi = \pm\pi$;

в) $\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$, если разность фаз $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

При сложении колебаний с кратными частотами траектория движения имеет вид симметричных картин, называемых фигурами Лиссажу. Например, на рис. 11 изображена фигура, соответствующая отношению частот $\omega_x : \omega_y = 2:3$.

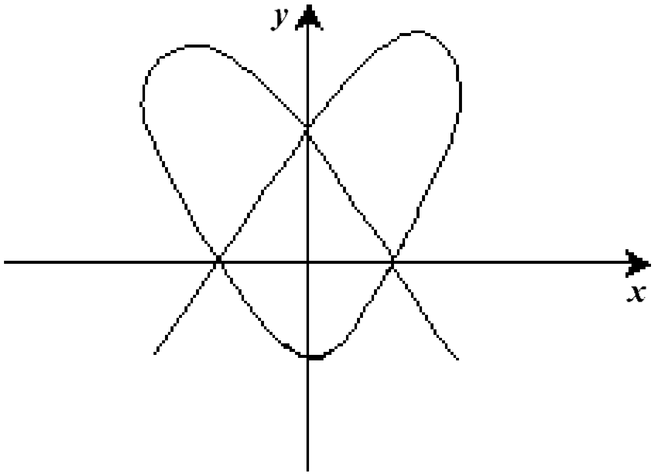


Рис. 11

9. Механические волны

Процесс распространения колебаний в пространстве, сопровождающийся переносом энергии колебаний, называется *волновым процессом* или *бегущей волной*.

Гармонические колебания, распространяющиеся в пространстве, называются *монохроматической* волной.

Механические волны могут быть как продольными, так и поперечными. *Продольной* является волна, в которой частицы среды колеблются в направлении распространения волны. *Поперечной* называется волна, в которой частицы среды колеблются в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. Продольные волны могут распространяться в любых средах, а поперечные – только в твердых телах и некоторых жидкостях.

Фронтом волны называется поверхность, отделяющая возмущенную область пространства (ту, в которой уже есть колебания) от невозмущенной.

Волновая поверхность – геометрическое место точек, в которых частицы среды колеблются в одинаковой фазе. По виду волновой поверхности волны делятся на плоские, сферические и цилиндрические.

Длиной волны λ называется:

а) кратчайшее расстояние, измеренное в направлении распространения волны, между точками среды, колеблющимися в одинаковых фазах;

б) расстояние, проходимое волной за время, равное периоду колебаний частиц среды.

Исходя из второго определения, можно записать, что $\lambda = V \cdot T = \dfrac{V}{\nu}$. Отсюда

$$\lambda \cdot \nu = V,$$

где ν – частота волны, V – скорость волны. Это уравнение справедливо для волн любой природы.

При переходе из одной среды в другую изменяется скорость волны, т.к. она определяется плотностью и упругими свойствами среды. Как следствие, во столько же раз изменяется и длина волны. Частота волны при этом остается неизменной, т. к. она зависит лишь от источника волн.

Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси x, может быть записано в виде

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right] = A\cos(\omega t - kx),$$

где y – смещение любой из точек среды с координатой x в момент t; A – амплитуда волны; u – скорость распространения колебаний в среде; $k = \dfrac{\omega}{u}$ – проекция волнового вектора на ось x.

Связь разности фаз $\Delta\varphi$ колебаний с расстоянием Δx между точками среды, отсчитанным в направлении распространения колебаний

$$\Delta\varphi = k \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x,$$

где λ – длина волны.

Распространяясь в среде, упругие волны переносят энергию. Средняя объемная плотность этой энергии

$$\varpi = \frac{1}{2} \cdot \rho_0 \cdot A^2 \cdot \omega_0^2,$$

где ρ_0 – плотность среды.

Потоком энергии волны (Φ) через некоторую площадку S, перпендикулярную направлению распространения волны, называется энергия, переносимая волной через эту площадку в единицу времени

$$\Phi = \frac{dE}{dt} = \varpi \cdot S \cdot u .$$

Плотность потока энергии – поток энергии через единичную площадку

$$j = \frac{\Phi}{S} = \varpi \cdot u \quad \text{или} \quad \vec{j} = \varpi \cdot \vec{u} .$$

Вектор $\vec{j}$ часто называют вектором Умова.

Опыт показывает, что частота сигнала, принимаемого приемником, может отличаться от частоты сигнала, излучаемого источником. Все зависит от того, движутся или покоятся источник и приемник волн. Это называется эффектом Допплера. Основная расчетная формула здесь

$$\omega_{пр} = \omega_{ист} \cdot \frac{u \pm V_{пр}}{u \pm V_{ист}} ,$$

где $V_{пр}$ и $V_{ист}$ – скорости движения приемника и источника, u – скорость распространения волны. Если источник и приемник сближаются, то $\omega_{пр} > \omega_{ист}$ если удаляются, то $\omega_{пр} < \omega_{ист}$.

10. Примеры решения задач

Пример 1. Радиус-вектор частицы меняется со временем t по закону $\vec{r} = \vec{b} \cdot t \cdot (1 - \alpha t)$, где $\vec{b}$ – постоянный вектор, α – положительная постоянная. Найти:

а) скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ частицы в зависимости от времени;

б) промежуток времени Δt по истечении которого частица вернётся в исходную точку;

в) путь S, который она пройдёт при этом.

Решение. Найдём скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ частицы по формулам:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{b} \cdot (1 - 2\alpha t),$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = -2\vec{b}c = const.$$

Для определения интервала времени Δt учтём, что при $t = \Delta t$ $\vec{r} = 0$:

$$\vec{b}\Delta t(1 - \alpha \Delta t) = 0,$$

$$\Delta t = \frac{1}{\alpha}.$$

На рис. 12 изображена зависимость радиус-вектора *r* от времени, из которой следует, что $S = 2r_m$ (т. к. движение прямолинейное) и r_m определяется соотношением

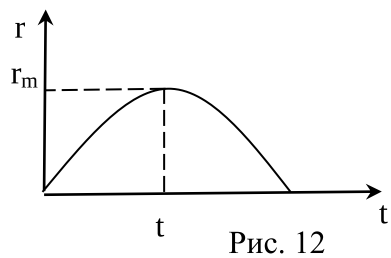


Рис. 12

$$r_m = bt_1(1 - \alpha t_1),$$

где $t_1 = \dfrac{1}{2\alpha}$.

Тогда

$$S = 2\frac{b}{2c}(1 - c\frac{1}{2c}) = \frac{b}{2c}.$$

Пример 2. Снаряд вылетел со скоростью $V_1 = 320\, м/с$, сделав внутри ствола $n = 2{,}0$ оборота. Длина ствола $l = 2{,}0\, м$. Считая движение снаряда в стволе равноускоренным, найти его угловую скорость вращения вокруг оси в момент вылета.

Решение. Движение снаряда можно разложить на две составляющие – поступательную и вращательную. Оба движения являются равноускоренными.

Рассмотрим вращательное движение. Угловое ускорение $\varepsilon = const$, и $\omega = \varepsilon t$. Тогда следует, что:

$$\varphi = \int_0^{t_1} \omega \cdot dt = \int_0^{t_1} \varepsilon t \cdot dt = \frac{\varepsilon \cdot t_1^{\,2}}{2},$$

где t_1 – время движения снаряда в стволе. Т. к. угол поворота $\varphi = 2\pi n$, то отсюда

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t_1^2} = \frac{4\pi n}{t_1^2},$$

и

$$\omega_1 = \varepsilon t_1 = \frac{4\pi n}{t_1},$$

где ω_1 – угловая скорость вращения снаряда в момент вылета.

Для определения времени t_1 рассмотрим поступательное движение снаряда. Это равноускоренное движение с нулевой начальной скоростью. Значит пройденный снарядом внутри ствола путь l может быть найден как

$$l = \frac{at_1^2}{2} = \frac{(at_1)t_1}{2} = \frac{V_1 t_1}{2},$$

откуда $t_1 = 2l/V_1$ и $\omega_1 = 2\pi n V_1/l = 2.0 * 10^3\ рад/с$.

Пример 3. По наклонной плоскости движется груз массой $m_1 = 5.0кг$, связанный нитью, перекинутой через блок, с другим грузом массой $m_2 = 2.0кг$. Найти силу натяжения нити $\boldsymbol{T}$ и ускорение $\boldsymbol{a}$ грузов, если коэффициент трения между первым грузом и плоскостью равен $\mu = 0.1$, а угол наклона плоскости к горизонту равен $\alpha = 30^\circ$. Нить считать невесомой, нерастяжимой; блок – невесомым.

Решение. Задачи на динамику м.т. решают по следующей схеме:

1. Делают рисунок к задаче, на котором изображают все реальные силы, действующие на все рассматриваемые тела.
2. Для каждого из тел системы записывают уравнение движения – второй закон Ньютона в векторном виде.
3. Выбирают координатные оси.

4. Проектируют векторные уравнения (второй закон Ньютона) на выбранные оси координат.

5. Замыкают систему получившихся уравнений (т. е. добиваются того, чтобы число уравнений стало равно число неизвестных величин).

6. Решают систему уравнений.

1. В данной задаче на первое тело действуют следующие силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$. На второе тело действуют сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$ (см. рис. 13).

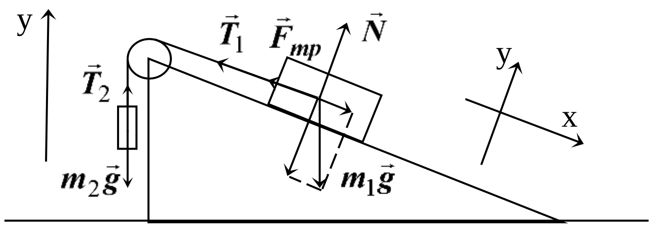


Рис. 13

2. Уравнения движения первого и второго тел в векторном виде

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр}$$

$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2$$

3. Выберем оси координат. Для первого тела ось Ох направим вдоль наклонной плоскости в направлении движения тела, а ось Оу – перпендикулярно наклонной плоскости. При этом мы приняли решение, что тело опускается, хотя может быть и наоборот. На данном этапе это не принципиально, т. к. подстановка численных значений в окончательную формулу для ускорения укажет нам правильность сделанного предположения. Для второго тела выберем лишь одну ось Оу$_2$, направленную вертикально вверх (см. рис. 13). Отметим, что для каждого тела можно выбирать свои оси координат, исходя из удобства в решении задачи.

4. Проекция векторных уравнений на выбранные оси имеет вид

первое тело:

на ось Ох: $m_1a_1 = m_1g \cdot \sin\alpha - T_1 - F_{тр}$ (1)

на ось Оу: $0 = -m_1g \cdot \cos\alpha + N$ (2)

второе тело:

на ось Оу$_2$: $m_2a_2 = T_2 - m_2g$ (3)

5. Мы получили 3 скалярных уравнения, в которых содержится 6 неизвестных величин ($a_1, T_1, F_{тр}, N, a_2, T_2$). Для того, чтобы система уравнений стала замкнутой, необходимо дописать еще три новых уравнения. Воспользуемся связью между модулем силы трения скольжения и силой реакции опоры

$$F_{тр} = \mu N \qquad (4)$$

Так как нить считается невесомой и нерастяжимой, а блок – невесомым, то силы натяжения нитей и ускорения равны для обоих тел

$$T_1 = T_2 \qquad (5)$$

$$a_1 = a_2 \qquad (6)$$

Система уравнений (1) – (6) получилась замкнутой.

6. Перепишем эту систему в новом виде

$$m_1a = m_1g \cdot \sin\alpha - T - \mu N$$

$$N = m_1g \cdot \cos\alpha$$

$$m_2a = -m_2g + T$$

или

$$m_1a = m_1g \cdot \sin\alpha - T - \mu \cdot m_1g \cdot \cos\alpha$$

$$m_2a = -m_2g + T\ .$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$(m_1 + m_2)a = m_1g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2g$$

Отсюда ускорение тел и сила натяжения нити

$$a = \frac{m_1(\sin\alpha - \mu \cdot \cos\alpha) - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g\ ,$$

$$T = m_2a + m_2g$$

Подставляя численные значения, получаем:

$$a = \frac{5(0.5 - 0.1 \cdot 0.86) - 2}{7} \cdot 10 = \frac{2.05 - 2}{7} \cdot 10 = \frac{0.5}{7} = 0.07\ ^{м}\!/_{c^2}$$

$$T = 2(0.07 + 9.8) = 2 \cdot 9.87 = 19.74H$$

Положительный результат для ускорения указывает на то, что мы не ошиблись в выборе направления движения тел.

Пример 4. Ящик массой m_1 = 20 кг соскальзывает по идеально гладкому лотку длиной $l=2$ м на неподвижную тележку с песком и застревает в нем. Тележка с песком массой m_2 = 80 кг может свободно (без трения) перемещаться по рельсам в горизонтальном направлении. Определить скорость u тележки с ящиком, если лоток наклонен под углом α =30° к рельсам.

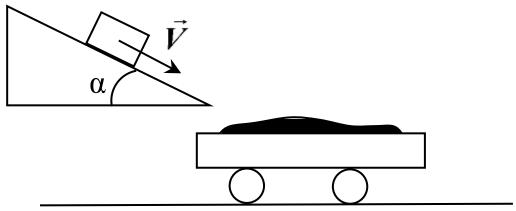


Рис. 14

Решение. Тележку и ящик можно рассматривать, в момент касания, как систему двух неупруго взаимодействующих тел. Но эта система не замкнута, так как на нее действуют внешние силы: силы тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}_2$ (см. рис. 14). Поэтому применить закон сохранения импульса к системе ящик – тележка в векторном виде нельзя. Но так как проекции указанных сил на направление оси ***x,*** совпадающей с направлением рельсов, равны нулю, то проекцию импульса системы на это направление можно считать постоянной, т. е.

$$(p_x)_{до} = (p_x)_{после}$$

или

$$p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} \qquad (1)$$

где p_{1x} и p_{2x} — проекции импульсов ящика и тележки с песком в момент падения ящика на тележку; p'_{1x} и p'_{2x} – те же величины после падения ящика, рис. 14.

Рассматривая тела системы как материальные точки, выразим в равенстве (1) импульсы тел через их массы и скорости, учитывая, что $p_{2x}=0$ (тележка до взаимодействия с ящиком покоилась) и после взаимодействия оба тела системы движутся с одной и той же скоростью u:

$$m_1 V_{1x} = (m_1 + m_2)\cdot u$$

или $$m_1V_1\cos\alpha=(m_1+m_2)\cdot u$$

где $V_{1x}=V_1\cos\alpha$ - проекция скорости ящика на ось x перед падением на тележку.

Отсюда $$u=\frac{m_1V_1\cos\alpha}{m_1+m_2} \qquad (2)$$

Считая, что ящик движется по лотку без трения, модуль скорости V_1 определим из закона сохранения энергии:

$$m_1gh=\frac{m_1V_1^2}{2},$$

где $h = l\sin\alpha$. Тогда

$$V_1=\sqrt{2gl\sin\alpha} \qquad (3)$$

Подставив выражение (3) в формулу (2), получим

$$u=\frac{m_1\cos\alpha\sqrt{2gl\sin\alpha}}{m_1+m_2}.$$

После вычислений найдем

$$u=\frac{20\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 2\sin 30^0}}{20+80}\cos 30^0\ м/с=0{,}767 м/с$$

Пример 5. Шар массой m_1, движущийся горизонтально с некоторой скоростью V_1, столкнулся с неподвижным шаром массой m_2. Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю ε своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Решение. Доля энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением

$$\varepsilon=\frac{T_2}{T_1}=\frac{m_2u_2^2}{m_1V_1^2}=\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{u_2}{V_1}\right)^2, \qquad (1)$$

где V_1 и T_1 – скорость и кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и T_2 – скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из формулы (1), для определения ε надо найти u_2. Согласно условию задачи, импульс системы двух шаров относительно горизонтального направления не изменяется и механическая энергия шаров в другие виды не переходит. Пользуясь этим, найдем:

$$m_1V_1 = m_1u_1 + m_2u_2; \qquad (2)$$

$$\frac{m_1V_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \qquad (3)$$

Решим совместно уравнения (2) и (3):

$$u_2 = \frac{2m_1V_1}{m_1 + m_2}.$$

Подставив это выражение u_2 в формулу (1) и сократив на V_1 и m_1, получим

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2m_1V_1}{V_1(m_1 + m_2)}\right]^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Из найденного соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров.

Пример 6. Маховик в виде сплошного диска радиусом R=0,2 м и массой m=50 кг раскручен до частоты вращения ν_1= 480 $мин^{-1}$ и предоставлен сам себе. Под действием сил трения маховик остановился через Δt=50 с. Найти момент M сил трения.

Решение. Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения в виде

$$J_z\varepsilon_z = M_z, \qquad (1)$$

где J_z – момент инерции маховика относительно оси z, совпадающей с его геометрической осью; ε_z – угловое ускорение вдоль этой оси; M_z – момент внешних сил (в данном случае момент сил трения), действующих на маховик относительно оси z.

Момент сил трения можно считать не изменяющимся с течением времени (M_z=const), поэтому уравнение (1) может быть переписано в виде

$$M_z = J_z \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \qquad (2)$$

где $\Delta\omega$ – изменение угловой скорости маховика при торможении; Δt – время торможения.

Момент инерции маховика в виде сплошного диска определяется по формуле

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2 .$$

Изменение угловой скорости $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ выразим через конечную ν_2 и начальную ν_1 частоты вращения, пользуясь соотношением $\omega = 2\pi\nu$:

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi\nu_2 - 2\pi\nu_1 = 2\pi(\nu_2 - \nu_1).$$

Подставив в формулу (2) выражения для J_z и $\Delta\omega$, получим

$$M_z = \pi mR^2(\nu_2 - \nu_1)/\Delta t . \quad (3)$$

Проверим, дает ли расчетная формула единицу момента силы (Н*м). Для этого в правую часть формулы вместо символов величин подставим их единицы измерения:

$$\frac{[m][R^2][n]}{[t]} = \frac{1кг \cdot 1м^2 \cdot 1с^{-1}}{1с} = 1кг \cdot м \cdot с^{-2} \cdot 1м = 1Н \cdot м .$$

Произведем вычисления, учитывая, что $\nu_1 = 480\, мин^{-1} = 480/60\ с^{-1} = 8с^{-1}$ и $\nu_2 = 0$:

$$M_z = \frac{3{,}14 \cdot 50 \cdot (0{,}2)^2 \cdot (0-8)}{50} Н \cdot м = -1\, Н \cdot м .$$

Знак минус показывает, что момент сил трения оказывает на маховик тормозящее действие.

Пример 7. Платформа в виде сплошного диска радиусом R=1,5 м и массой m_1=180 кг вращается около вертикальной оси с частотой ν=10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой m_2=60 кг. Какую линейную скорость V относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Решение. Согласно условию задачи, момент внешних сил относительно оси вращения *z*, совпадающей с геометрической осью платформы, можно считать равным нулю. При этом условии проекция L_z момента импульса системы платформа – человек на ось z остается постоянной:

$$L_z = J_z\omega = const, \qquad (1)$$

где J_z – момент инерции платформы с человеком относительно оси z; ω – угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому в начальном состоянии $J_z = J_1 + J_2$, а в конечном состоянии $J_z^{/} = J_1^{/} + J_2^{/}$.

С учетом этого равенство (1) примет вид

$$(J_1 + J_2)\omega = (J_1^{/} + J_2^{/})\omega^{/}, \qquad (2)$$

где значения моментов инерции J_1 и J_2 платформы и человека соответственно относятся к начальному состоянию системы; $J_1^{/}$ и $J_2^{/}$ – к конечному.

Момент инерции платформы относительно оси z при переходе человека не изменяется: $J_1 = J_1^{/} = \frac{1}{2}m_1R^2$. Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, то его момент инерции J_2 в начальном состоянии (в центре платформы) можно считать равным нулю. В конечном состоянии (на краю платформы) момент инерции человека $J_2^{/} = m_2R^2$.

Подставим в формулу (2) выражения моментов инерции, начальной угловой скорости вращения платформы с человеком ($\omega = 2\pi\nu$) и конечной угловой скорости ($\omega^{/} = V/R$, где V – скорость человека относительно пола):

$$\left(\tfrac{1}{2}m_1R^2 + 0\right)\cdot 2\pi\nu = \left(\tfrac{1}{2}m_1R^2 + m_2R^2\right)\cdot V/R.$$

После сокращения на R^2 и простых преобразований находим скорость:

$$V = 2\pi\nu Rm_1/(m_1 + 2m_2).$$

Проведем вычисления:

$$V = \frac{2\cdot 3.14\cdot\frac{1}{6}\cdot 1.5\cdot 180}{180 + 2\cdot 60}\,м/с = 1\,м/с.$$

Пример 8. Время жизни частицы в лабораторной системе отсчёта $\tau = 5$ мкс, собственное время её жизни $\tau_0 = 3$ мкс. Найдите расстояние, которое она пролетела в лабораторной системе отсчёта от точки рождения до точки распада и её скорость.

Решение. Воспользуемся формулой, связывающей между собой время жизни частицы в лабораторной системе отсчета и ее собственное время жизни:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

Из этого уравнения можно найти скорость частицы:

$$V = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2}.$$

Подставим численные значения

$$V = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = 0{,}8\,c \approx 2{,}4 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Расстояние, которое частица пролетела в лабораторной системе отсчёта, найдем как произведение ее скорости на время жизни в этой системе отсчета:

$$l = V \cdot \tau = 2{,}4 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 1200 \text{ м}.$$

Пример 9. Через какое время t_1 после начала колебаний точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний $T = 24c$, колебания начинаются из положения равновесия.

Решение. Если колебания начинаются из положения равновесия, то зависимость смещения от времени удобно представить в виде

$$\xi = A \cdot \sin(\omega_0 t).$$

По условию задачи при $t = t_1$ $\xi_1 = \frac{A}{2}$. Следовательно,

$$\frac{A}{2} = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t_1) = A \cdot \sin(\frac{2\pi}{T} \cdot t_1).$$

Отсюда $\sin(\frac{2\pi}{T}\cdot t_1)=\frac{1}{2}$ и $\frac{2\pi}{T}\cdot t_1=\frac{\pi}{6}$. т.е. $t_1=\frac{T}{12}=2c$.

Пример 10. Частица массой *m=0,01 кг* совершает гармонические колебания с периодом *T=2 с*. Полная энергия колеблющейся частицы *E=0,1мДж.* Определить амплитуду *A* колебаний и наибольшее значение силы F_{max}, действующей на частицу.

Решение. Для определения амплитуды колебаний воспользуемся выражением полной энергии частицы:

$$E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2,$$

где $\omega={}^{2\pi}\!/_{T}$. Отсюда амплитуда

$$A=\frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}\ . \qquad (1)$$

Так как частица совершает гармонические колебания, то сила, действующая на неё, является квазиупругой и, следовательно, может быть выражена соотношением $F=-k\cdot\xi$, где k – коэффициент квазиупругой силы; ξ – смещение колеблющейся точки. Максимальная сила будет при максимальном смещении, равном амплитуде:

$$F_{\max}=kA. \qquad (2)$$

Коэффициент k выразим через период колебаний:

$$k=m\omega^2=m\cdot 4\pi^2/T^2\ . \qquad (3)$$

Подставив выражения (1) и (3) в (2) и произведя упрощения, получим

$$F_{\max}=2\pi\frac{\sqrt{2mE}}{T}\ .$$

Произведём вычисления:

$$A=\frac{2}{2\cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{2\cdot 10^{-4}}{10^{-2}}}м=0{,}045м=45мм\ .$$

$$F_{\max}=\frac{2\cdot 3{,}14}{2}\sqrt{2\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-4}}H=4{,}44\cdot 10^{-3}H=4{,}44мH\ .$$

Пример 11. Из двух математических маятников один совершил $N_1 = 10$ колебаний, другой за то же время – $N_2 = 6$ колебаний. Найти длину каждого маятника, l_1 и l_2, если разница в их длине составляет $\Delta l = 16 см$.

Решение. Воспользуемся формулой для периода колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \ .$$

Так как маятники колебались в течение одинакового времени то $N_1 \cdot T_1 = N_2 \cdot T_2$ или

$$N_1 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = N_2 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \ .$$

Выполнив сокращения и возведя обе части уравнения в квадрат, получим $N_1^2 \cdot l_1 = N_2^2 \cdot l_2$ (1)

Из условия задачи $\Delta l = l_2 - l_1$ (2).

Решая совместно уравнения (1) и (2), имеем

$$\Delta l = l_2 - (\frac{N_2}{N_1})^2 \cdot l_2 = \left[1 - \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\right] \cdot l_2 \ .$$

Отсюда $l_2 = \dfrac{\Delta l}{1 - \left(\dfrac{N_2}{N_1}\right)^2} = \dfrac{16}{1 - 0.36} = 25 см$ и $l_1 = l_2 - \Delta l = 25 - 16 = 9 см$.

Пример 12. Пружинный маятник совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 4.0 см$. При смещении $\xi_1 = 3.0 см$ на маятник действует сила упругости $F_1 = 9 \cdot 10^{-5} H$. Определить потенциальную, кинетическую и полную энергии, соответствующие данному смещению.

Решение. Потенциальная энергия маятника может быть записана в виде $E_{пот} = \dfrac{k \cdot \xi_1^2}{2}$, а сила упругости (по модулю) $F_1 = k \cdot \xi_1$. Объединяя эти два уравнения, получаем

$$E_{пот} = \frac{k\xi_1 \cdot \xi_1}{2} = \frac{F_1 \cdot \xi_1}{2} = \frac{9 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{2} = 13.5 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}$$

Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, всегда равна его максимальной потенциальной (кинетической) энергии, поэтому

$$E = \frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{F_1 \cdot A^2}{2 \cdot \xi_1} = \frac{9 \cdot 10^{-5} \cdot 16 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 24 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Кинетическую энергию найдем через разность полной и потенциальной энергии

$$E_к = E - E_{пот} = (24 - 13.5) \cdot 10^{-7} = 10.5 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

Пример 13. Логарифмический декремент затухания тела, колеблющегося с частотой 50 Гц, равен 0.01. Определить: 1) время, за которое амплитуда колебаний тела уменьшится в 20 раз; 2) число полных колебаний тела, совершенных за это время.

Решение. Амплитуда затухающих колебаний изменяется со временем по закону

$$A = A_0 \cdot e^{-\beta \cdot t}, \qquad (1)$$

где A_0 – амплитуда колебаний в начальный момент времени $t = 0$, β – коэффициент затухания. Логарифмический декремент затухания $\lambda = \beta \cdot T$, а $T = \frac{1}{\nu}$. Тогда $\beta = \lambda \cdot \nu$ и выражение (1) можно записать в виде

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \nu t},$$

откуда искомое время

$$t = \frac{1}{\lambda \nu} \cdot \ln \frac{A_0}{A}.$$

Число колебаний, совершенных телом за время t

$$N = \frac{t}{T} = t\nu.$$

Вычисляя, получаем: 1) $t = 6$ с, 2) $N = 300$.

Пример 14. Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемые уравнениями $x_1 = 3\cdot\cos(2\pi t), см$ и $x_2 = 3\cdot\cos(2\pi t + \frac{\pi}{4}), см$. Определить для результирующего колебания амплитуду и начальную фазу. Записать уравнение результирующего колебания.

Решение. Амплитуду и фазу результирующего колебания найдем по формулам

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \right).$$

Подставив численные значения, получим

$$A = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + 2\cdot 3\cdot 3\cdot\cos(\pi/4)} = 5.54 см$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{3\cdot\sin(0) + 3\cdot\sin(\pi/4)}{3\cdot\cos(0) + 3\cdot\cos(\pi/4)} \right) = arctg\left(\frac{2.12}{5.12}\right) = \frac{\pi}{8}\ рад$$

Так как складываемые колебания имеют одинаковую частоту, то и результирующее колебание будет происходить с той же частотой

$x = 5.54\cdot\cos(2\pi t + \pi/8)$, см.

Пример 15. На входы X и Y осциллографа поданы напряжения

$$u_x = 2\cos 10^4 t, B$$
$$u_y = 4\sin 10^4 t, B.$$

Найти траекторию электронного луча.

Решение. По условию задачи амплитудные значения равны

$u_{x(m)} = 2$ В, $u_{y(m)} = 4$ В.

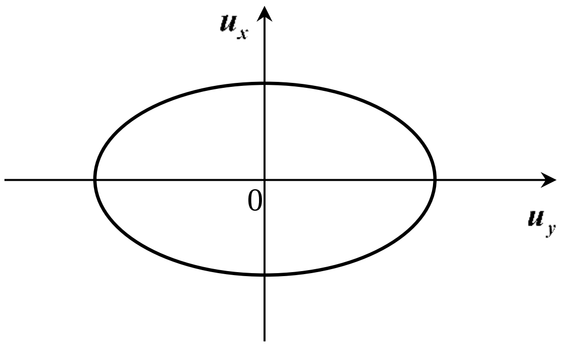
Разделив u_x и u_y на амплитудные значения, возведём левые и правые части уравнений в квадрат и сложим, получим:

$$\left(\frac{u_x}{2}\right)^2 + \left(\frac{u_y}{4}\right)^2 = \cos^2(10^4 t) + \sin^2(10^4 t)$$

или

$$\left(\frac{u_x}{2}\right)^2+\left(\frac{u_y}{4}\right)^2=1.$$

Получили уравнение эллипса: выбрав координатные оси, построим траекторию результирующего колебания



Пример 16. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $V=15\,{}^{м}\!/_{с}$. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях $x_1=5м$ и $x_2=5.5м$ от источника волны, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi={}^{\pi}\!/_{5}$. Амплитуда волны $A=4см$. Определить: 1) длину волны; 2) уравнение волны; 3) смещение y_1 первой точки в момент времени $t_1=3с$.

Решение. Разность фаз колебаний двух точек среды находится как

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\Delta x,$$

где $\Delta x=x_2-x_1$ - расстояние между этими точками. Следовательно,

$$\lambda=\frac{2\pi(x_2-x_1)}{\Delta\varphi}=\frac{2\cdot\pi\cdot(5.5-5)}{{}^{\pi}\!/_{5}}=5 \text{ м.}$$

Учитывая, что $\lambda\cdot\nu=V$, найдем циклическую частоту волны

$$\omega=2\pi\nu=2\pi\cdot\frac{V}{\lambda}=2\pi\cdot\frac{15}{5}=6\pi \text{ рад/с.}$$

Уравнение плоской синусоидальной волны имеет вид

$$y = A \cdot \cos(\omega t - kx) = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) = 4 \cdot \cos(6\pi t - 0.4\pi x), \text{ см.}$$

Чтобы найти смещение y_1, надо в это уравнение подставить численные значения t_1 и x_1

$$y_1 = 4 \cdot \cos(6\pi \cdot 3 - 0.4\pi \cdot 5) = 4 \cdot \cos(10\pi) = 4 \text{ см.}$$

Варианты заданий для контрольной работы

Номер варианта	Номера задач								
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90

Задачи для самостоятельного решения

1. Тело, свободно падающее с некоторой высоты, за последние t_1 = 4.0 с прошло h_1 = 196 м. Сколько времени t и с какой высоты h падало тело?

2. Студент проехал половину пути на велосипеде со скоростью V_1 = 16 км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью V_2 = 12 км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью V_3 = 5 км/ч. Определить среднюю скорость $\langle V \rangle$ движения студента на всем пути.

3. Движение точки задано уравнением $x = At + Bt^2$, м, где A = 12 м/с, B = 2.0 м/с^2. Чему равна скорость V_1 точки через t_1 = 2.0 с после начала движения и ее средняя скорость $\langle V \rangle$ в интервале времени от t_2 = 3.0 с до t_3 = 6.0 с?

4. Камень падает в шахту. Через t = *6.0 с* слышен стук камня о дно шахты. Определить глубину шахты h, если скорость звука считать равной $V_{зв}$ = *300 м/с*.

5. Тело брошено с земли под углом α = 30° к горизонту с начальной скоростью V_0 = 20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить максимальную высоту подъема тела h_{max} и дальность полета S.

6. Камень брошен в горизонтальном направлении и через $t_1 = 0.5$ *с* численное значение скорости камня V_1 стало в $n = 1,5$ раза больше начального. Чему была равна начальная скорость камня V_0?

7. Материальная точка движется по окружности радиуса R = 20 см равноускорено с тангенциальным ускорением a_τ = 5.0 см/с^2. Через какое время t_1 после начала движения ее нормальное ускорение a_n будет больше a_τ в n = 2.0 раза?

8. Точка движется по окружности с постоянной скоростью V = 50 см/с. Вектор скорости изменяет свое направлении на $\Delta\varphi$ = 30^0 за время Δt = 2.0 с. Чему равна угловая скорость ω, центростремительное ускорение a_n и тангенциальное ускорение a_τ?

9. Линейная скорость V_1 точки, находящейся на ободе вращающегося диска, в n = 3 раза больше, чем линейная скорость V_2 точки, находящейся на Δr = 6 см ближе к его оси. Определить радиус диска.

10. Диск, находящийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением ε = 0,5 рад/с. Найти угловую скорость ω в конце второй секунды после начала вращения. Сколько оборотов сделает диск за это время?

11. По наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α = 30°, скользит тело. Определить скорость тела в конце второй секунды после начала скольжения, если коэффициент трения между телом и плоскостью μ = 0,15.

12. В вагоне, движущемся с ускорением a = 5,7 м/с^2, висит на шнуре груз массой m = 200 г. Найти силу натяжения шнура T и угол α отклонения шнура от вертикали.

13. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг проходящей через его центр вертикальной оси с частотой ν = 10 об/мин. На каком расстоянии r от центра диска может удержаться лежащее на диске небольшое тело, если коэффициент трения μ = 0,2 ?

14. Самолет делает «мертвую петлю» радиуса R = 500 м с постоянной скоростью V = 360 км/ч. Найти вес летчика массы m = 70 кг в нижней и верхней точках петли.

15. С каким ускорением a будет двигаться по горизонтальной поверхности тело массой m = 4 кг, если на него будет действовать сила F = 20 Н, направленная под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту? Коэффициент трения тела о поверхность равен μ = 0,2.

16. Шарик на веревке длиной l = 50 см равномерно вращается в вертикальной плоскости. Найти, при какой частоте вращения ν веревка оборвется, если ее предел прочности $T_{пр}$ = 9 mg, где m – масса шарика.

17. Деревянный брусок массой m = 2 кг тянут равномерно по деревянной доске, расположенной горизонтально, с помощью пружины жесткостью k = 100 Н/м. Коэффициент трения равен μ = 0,3. Найти удлинение пружины.

18. Масса лифта с пассажирами равна 800 кг. Найти с каким ускорением и в каком направлении движется лифт, если известно, что натяжение троса, поддерживающего лифт, равно 4200 Н.

19. Найти удлинение буксирного троса с жесткостью k = 100 кН/м при буксировке автомобиля массой $m = 2*10^3$ кг с ускорением a = 0,5 м/с^2. Коэффициент трения равен μ = 0,1.

20. Как относятся друг к другу силы P_1 и P_2, с которыми автомобиль давит на середину выпуклого и вогнутого мостов? Радиус кривизны моста в обоих случаях R = 40 м, скорость автомобиля V = 36 км/час.

21. Орудие, жестко закрепленное на железнодорожной платформе, производит выстрел вдоль полотна железной дороги под углом $\alpha = 30°$ к линии горизонта. Определить скорость u_2 отката платформы, если снаряд вылетает со скоростью u_1 = 480 м/с. Масса платформы с орудием и снарядами m_2 = 18 т, масса снаряда m_1 = 60 кг.

22. Человек массой m_1 = 70 кг, бегущий со скоростью V_1 = 9 км/ч, догоняет тележку массой m_2 = 190 кг, движущуюся со скоростью V_2 = 3,6 км/ч, и вска-

кивает на нее. С какой скоростью станет двигаться тележка с человеком? С какой скоростью будет двигаться тележка с человеком, если человек до прыжка бежал навстречу тележке?

23. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек. Масса его m_1 = 60 кг, масса доски m_2 = 20 кг. С какой скоростью (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль нее со скоростью (относительно доски) u = 1 м/с? Массой колес и трением пренебречь.

24. Шар массой m_1 = 1 кг движется со скоростью V_1 = 4 м/с и сталкивается с шаром массой m_2 = 2 кг, движущимся навстречу ему со скоростью V_2 = 3 м/с. Каковы скорости u_1 и u_2 шаров после удара? Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

25. Шар массой m_1 = 3 кг движется со скоростью V_1 = 2 м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой m_2 = 5 кг. Какая работа будет совершена при деформации шаров? Удар считать абсолютно неупругим, прямым, центральным.

26. Шар массой m_1 = 2 кг сталкивается с покоящимся шаром большей массы и при этом теряет 40% кинетической энергии. Определить массу m_2 большего шара. Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

27. Тело брошено вертикально вверх со скоростью V_o = 20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на какой высоте h кинетическая энергия тела будет равна его потенциальной энергии.

28. В деревянный шар массой m_1 = 8 кг, подвешенный на нити длиной l = 1,8 м, попадает горизонтально летящая пуля массой m_2 = 4 г. С какой скоростью летела пуля, если нить с шаром и застрявшей в нем пулей отклонилась от вертикали на угол α = 30°? Размером шара пренебречь. Удар пули считать прямым, центральным.

29. Подвешенный на нити шарик массой m = 200 г отклоняют на угол 45^o. Определить силу натяжения нити в момент прохождения шариком положения равновесия.

30. Из ствола автоматического пистолета вылетела пуля массой m_1 = 10 г со скоростью u = 300 м/с. Затвор пистолета массой m_2 = 200 г прижимается к стволу пружиной, жесткость которой k = 25 кН/м. На какое расстояние отойдет затвор после выстрела? Считать, что пистолет жестко закреплен.

31. Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого J = 150 кг • м^2, вращается с частотой ν = 240 об/мин. Через время t = 1 мин, как на маховик стал действовать момент сил торможения, он остановился. Определить момент M сил торможения.

32. К ободу однородного сплошного диска радиуса R = 0,5 м приложена постоянная касательная сила F = 100 Н. При вращении диска на него действует момент сил трения $M_{тр}$ = 2 Н •м. Определить массу m диска, если известно, что его угловое ускорение ε постоянно и равно 16 рад/с^2.

33. Колесо, вращаясь равнозамедленно при торможении, уменьшило за 1 мин скорость вращения от 300 до 180 об/мин. Момент инерции колеса равен 2 кг м^2. Найти: 1) угловое ускорение колеса, 2) тормозящий момент, 3) работу торможения, 4) число оборотов, сделанных колесом за эту минуту.

34. Блок, имеющий форму диска массой m = 0,4 кг, вращается под действием сил натяжения нити, к концам которой подвешены грузы массами m_1 = 0,3 кг и m_2 = 0,7 кг. Определить силы натяжения T_1 и T_2 нити по обе стороны блока.

35. Стержень вращается вокруг оси, проходящей через его середину, согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где A = 2 рад/с, B = 0,2 рад/с^3. Определить вращающий момент M, действующий на стержень через время t_1 = 2 с после начала вращения, если момент инерции стержня J = 0,048 $кг \cdot м^2$.

36. К ободу однородного сплошного диска массой m = 10 кг, насаженного на ось, приложена постоянная касательная сила F = 30 Н. Определить кинетическую энергию диска через время t = 4 с после начала действия силы.

37. Полная кинетическая энергия T диска, катящегося по горизонтальной поверхности, равна 24 Дж. Определить кинетическую энергию T_1 поступательного и T_2 вращательного движения диска.

38. Маховое колесо начинает вращаться с постоянным угловым ускорением ε = 0,5 рад/с^2 и через t_1 = 15 с после начала движения приобретает момент импульса, равный L = 73,5 кг м^2/с. Найти кинетическую энергию колеса через t_2 = 20 с после начала вращения.

39. Горизонтальная платформа массой 100 кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, делая 10 об/мин. Человек массой 60 кг стоит при этом на краю платформы. С какой скоростью начнет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу круглым однородным диском, а человека – точечной массой.

40. Платформа в виде диска диаметром D = 3 м и массой m = 180 кг может вращаться вокруг вертикальной оси. С какой угловой скоростью ω_1 будет вращаться эта платформа, если по ее краю пойдет человек массой m_1 = 70 кг со скоростью V = 1,8 м/с относительно платформы?

41. Найти во сколько раз увеличится масса электрона (m/m_0 -?) при прохождении им разности потенциалов U = 1,02 МВ.

42. При какой скорости V кинетическая энергия частицы T равна ее энергии покоя E_0?

43. Частица движется со скоростью $V = c/3$, где c – скорость света в вакууме. Какую долю энергии покоя составляет кинетическая энергия частицы?

44. Релятивистский электрон имел импульс $p_1 = m_0c$. Определить конечный импульс p_2 этого электрона (в единицах m_0c), если его энергия увеличилась в $n = 2$ раза.

45. Какую скорость должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в два раза?

46. Во сколько раз увеличивается продолжительность жизни нестабильной частицы (по часам неподвижного наблюдателя), если она начинает двигаться со скоростью, составляющей 99% скорости света?

47. Найти скорость частицы, если ее полная энергия в $n = 10$ раз больше энергии покоя.

48. Масса движущегося электрона вдвое больше его массы покоя. Найти кинетическую энергию этого электрона.

49. Солнце излучает в пространство ежесекундно около $\Delta E = 3{,}75*10^{26}$ Дж энергии. Считая излучение постоянным, найти, за какое время масса Солнца уменьшится в два раза. Принять начальную массу Солнца равной $1.97*10^{30}$ кг.

50. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его скорость составляла 95% скорости света?

51. Материальная точка совершает колебания согласно уравнению $\xi = A \cdot \sin(\omega t)$. В какой-то момент времени смещение точки $\xi_1 = 15$ см. При возрастании фазы колебаний в два раза, смещение ξ_2 оказалось равным 24 см. Определить амплитуду колебаний A.

52. Груз, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 8$ см. Определить жесткость пружины k, если известно, что максимальная кинетическая энергия груза $(W_k)_{\max} = 0.8$ Дж.

53. При гармонических колебаниях точки ее максимальная скорость $V_{\max} = 0.1$ м/с, а максимальное ускорение $a_{\max} = 1$ м/с^2. Написать уравнение колебаний, считая, что в начальный момент времени смещение максимально.

54. На горизонтальной плите находится груз. Плита колеблется с частотой ω_0, совершая по вертикали гармонические колебания. При каких амплитудах A колебаний груз не оторвется от поверхности плиты?

55. Материальная точка совершает простые гармонические колебания так, что в начальный момент времени смещение $\xi_0 = 4$ см, а скорость $V_0 = 10$ см/с. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0 колебаний, если их период $T = 2$ с.

56. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой $M = 200$ г, прикрепленный к горизонтально расположенной легкой пружине с жесткостью $k = 500$ Н/м. В шар попадает пуля массой $m = 10$ г, летевшая горизонтально со скоростью $V = 300$ м/с, и застревает в нем. Пренебрегая перемещением шара во

время удара и сопротивлением воздуха, определить амплитуду A и период T колебаний шара.

57. Точка совершает простые гармонические колебания, уравнение которых $\xi = A \cdot \sin(\omega t)$, где A = 5 см, ω = 2 рад/с. В момент времени, когда точка обладала потенциальной энергией W_n = 0,1 мДж, на нее действовала возвращающая сила F = 5 мН. Найти этот момент времени t_1.

58. Максимальная скорость груза пружинного маятника V_{max} = 1 м/с, масса m = 0,1 кг, амплитуда колебаний A = 1 см. Найти коэффициент жесткости пружины k и написать уравнение колебаний, если в начальный момент времени смещение равно 0. Определить время, за которое груз проходит путь от положения равновесия до половины амплитуды.

59. Тонкий обруч радиуса R = 50 см подвешен на вбитый в стену гвоздь и колеблется в плоскости, параллельной стене. Определить период T малых колебаний обруча.

60. Если увеличить массу груза, подвешенного к спиральной пружине, на Δm = 600 г, то период колебаний груза возрастет в n = 2 раза. Определить массу m первоначально подвешенного груза.

61. Амплитуда затухающих колебаний за 5 минут уменьшилась вдвое. За какое время, считая от начала движения, амплитуда уменьшится в 8 раз?

62. Найдите логарифмический декремент затухания осциллятора, у которого собственная частота $\omega_0 = 100$ с$^{-1}$, а время релаксации τ = 60 с.

63. Период собственных колебаний маятника T_0 = 4 с. В вязкой среде период того же маятника увеличился до T = 5 с. Определите коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания.

64. Закон затухающих колебаний задан в виде $x = A_0 e^{-0,5t} \sin (\pi t/2)$. Все значения даны в СИ. Найдите моменты времени, когда смещение колеблющейся точки достигает крайних значений.

65. Тело массы m = 100 г, совершая затухающие колебания, за t_1 = 1 мин потеряло 40% своей энергии. Определить коэффициент сопротивления среды r.

66. Найдите логарифмический декремент затухания осциллятора, у которого отношение резонансной циклической частоты к частоте затухающих колебаний $n = \Omega_{рез}/\omega = 0{,}97$.

67. Циклическая частота затухающих колебаний некоторой системы ω = 65 рад/с, а её добротность $Q = 2$. Определить собственную частоту ω_0 колебаний этой системы.

68. Амплитуды вынужденных колебаний при частотах $\nu_1 = 800$ Гц и $\nu_2 = 1200$ Гц равны между собой. Определите резонансную частоту системы, если затуханием можно пренебречь.

69. Период затухающих колебаний в системе равен $T = 0{,}2$ с, а отношение амплитуд первого и шестого колебаний равно 13. Определить резонансную частоту данной колебательной системы.

70. Определить резонансную частоту колебательной системы, если собственная частота колебаний $\nu_0 = 300$ Гц, а логарифмический декремент $\lambda = 0{,}2$.

71. Материальная точка участвует в двух колебаниях проходящих по одной прямой и выражаемых уравнениями: $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$ и $x_2 = A_2 \cos \omega_2 t$, где $A_1 = 1$см, $A_2 = 2$ см, $\omega_1 = \omega_2 = 1\ рад/с$. Найти амплитуду A сложного движения, его частоту ν и начальную фазу φ_0, написать уравнение движения.

72. Складываются два колебания одинакового направления и одинакового периода: $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$ и $x_2 = A_2 \sin \omega_2 (t + \tau)$, где $A_1 = A_2 = 1$см, $\omega_1 = \omega_2 = \pi c^{-1}$, $\tau = 0{,}5c$. Определить амплитуду A и начальную фазу φ_0. результирующего колебания. Написать его уравнение.

73. Определить разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты и амплитуды, если амплитуда их результирующего колебания равна амплитудам складываемых колебаний.

74. В результате сложения двух колебаний, период одного из которых $T_1 = 0.02$ с, получают биения с периодом $T_б = 0.2$ с. Определить период T_2 второго складываемого колебания.

75. Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями: $x = A_1 \cos\omega_1 t$ и $y = A_2 \sin\omega_2 t$, $A_1 = 2$ см, $A_2 = 3$ см, $\omega_1 = 2\omega_2$. Найти уравнение траектории точки построить ее на чертеже, показать направление движения точки.

76. Точка совершает одновременно два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями: $x = A_1 \sin\omega_1 t$ и $y = A_2 \cos\omega_2 t$, где $A_1 = 1$см, $\omega_1 = 0{,}5$ рад/с, $A_2 = 1$см, $\omega_2 = 1$ рад/с. Найти уравнение траектории, построить ее с соблюдением масштаба и указать направление движения.

77. Складываются два гармонических колебания одного направления, имеющие одинаковые амплитуды и одинаковые начальные фазы. Период первого колебания $T_1 = 2{,}00$ с, второго – $T_2 = 2{,}05$ с. Определить: 1) период результирующего колебания; 2) период биений.

78. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = 2\cos(\omega t)$ и $y = \sin(\omega t/2)$. Найти уравнение траектории точки и построить её на чертеже.

79. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, описываемых уравнениями $x = 3\cos(2\omega t)$, см и $y = 4\cos(2\omega t + \pi)$, см. Определить уравнение траектории точки и начертить её с нанесением масштаба.

80. Записать уравнение, являющееся результатом сложения двух одинаково направленных колебаний $x_1 = 3\cos(\pi t)$, см и $x_2 = 3\cos(\pi t + 2\pi/3)$, см.

81. Уравнение незатухающих колебаний дано в виде $y = \cos(0.5\pi t)$, м. Найти смещение и скорость колеблющейся точки, отстоящей от источника на расстоянии $x_1 = 250$ м в момент времени $t_1 = 1.5$ с. Длина волны $\lambda = 1000$ м.

82. Звуковые колебания, имеющие частоту $\nu = 500$ Гц и амплитуду $A = 0.25$ мм, распространяются в воздухе. Длина волны $\lambda = 70$ см. Найти: 1) скорость распространения колебаний; 2) максимальную скорость частиц воздуха.

83. Определите скорость распространения волны, если минимальное расстояние между двумя точками среды, колеблющимися с разностью фаз $\Delta\varphi$ = 60°, равно Δx = 10 см. Частота колебаний ν = 25 Гц.

84. Колебания в источнике происходят по закону $\xi = 0{,}1\sin 3\pi t$. Все значения даны в СИ. Скорость распространения волны v = 300 м/с. Напишите: а) уравнение волны $\xi(t, l)$; б) зависимость $\xi(t)$ для частицы среды, находящейся на расстоянии x = 300 м от источника; в) зависимость $\xi(x)$ для частиц среды в момент времени t = 1 с. Колебания считайте незатухающими, а волну плоской.

85. Электропоезд движется со скоростью V = 72 км/ч мимо неподвижного приемника и дает гудок, частота которого ν = 300 Гц. Принимая скорость звука в воздухе равной $V_{зв}$ = 340 м/с, определить скачок частоты, воспринимаемый приемником.

86. Колебания в источнике происходят по закону $\xi = A \sin \omega t$, где амплитуда A = 2 см. Найдите смещение точки, находящейся на расстоянии $x = \lambda/4$ от источника колебаний, в момент времени $t = T/3$.

87. Летучая мышь приближается перпендикулярно к стене со скоростью V = 6 м/с, издавая ультразвук частотой ν = 45 кГц. Какие две частоты звука ν_1 и ν_2 слышит летучая мышь? Скорость звука в воздухе считать равной $V_{зв}$ = 340 м/с.

88. На одной оси находятся приёмник и источник звука частотой ν_0 = 1 кГц. Источник совершает гармонические колебания вдоль этой оси с циклической частотой ω = 100 рад/с и амплитудой A = 1 см, приёмник неподвижен. Скорость звука в воздухе v = 340 м/с. Найдите ширину диапазона частот, воспринимаемого приёмником.

89. Волна распространяется в упругой среде со скоростью V = 150 м/с. Определить частоту ν колебаний, если минимальное расстояние Δx между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 0,75 м.

90. Задано уравнение плоской волны в виде $x = 0{,}01 \cos (600t - 2x)$. Все значения даны в СИ. Найдите период, длину волны, скорость её распространения и максимальную скорость частиц среды.

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Ускорение свободного падения	$g = 9{,}81$ м/с^2
Гравитационная постоянная	$G = 6{,}67 \bullet 10^{-11}$ м^3/(кг$\bullet$с^2)
Постоянная Авогадро	$N_A = 6{,}02 \bullet 10^{23}$ моль$^{-1}$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(моль$\bullet$К)
Постоянная Больцмана	$к = 1{,}38 \bullet 10^{-23}$ Дж/К
Элементарный заряд	$e = 1{,}6 \bullet 10^{-19}$ Кл
Скорость света в вакууме	$c = 3{,}00 \bullet 10^{8}$ м/с
Масса покоя электрона	$m_0 = 9{,}1 \bullet 10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p = 1{,}6724 \bullet 10^{-27}$ кг
Масса покоя α-частицы	$m_\alpha = 6{,}64 \bullet 10^{-27}$ кг
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \bullet 10^{-12}$ Ф/м
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \bullet 10^{-7}$ Гн/м
Постоянная Планка	$h = 6{,}62 \bullet 10^{-34}$ Дж$\bullet$с $\hbar = 1{,}05 \bullet 10^{-34}$ Дж$\bullet$с
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \bullet 10^{-8}$ Вт/(м^2$\bullet$К^4)
Постоянная Вина	$b = 2{,}9 \bullet 10^{-3}$ м$\bullet$К
Постоянная Ридберга	$R = 1{,}10 \bullet 10^{7}$ м$^{-1}$
Радиус первой боровской орбиты	$a_1 = 0{,}529 \bullet 10^{-10}$ м
Комптоновская длина волны электрона	$\Lambda = 2{,}43 \bullet 10^{-12}$ м
Магнетон Бора	$\mu_B = 0{,}927 \bullet 10^{-23}$ А$\bullet$м^2

Учебное издание

Механика

Уральский государственный педагогический университет.
620017 Екатеринбург, пр-т Космонавтов, 26.
E-mail: uspu@uspu.me